

5. Aufbau der Zahlenbereiche

5.1. Der Bereich der reellen Zahlen

Am Anfang mathematischer Betrachtungen steht auch der Zahlbegriff. Die Zahlen gehören zu den grundlegenden mathematischen Objekten, mit deren Hilfe die realen Dinge oder Ereignisse quantifiziert oder geordnet werden können. In diesem Abschnitt wollen wir ihre wesentlichen Eigenschaften und die Gesetze, denen sie genügen, zusammenstellen.

5.1.1. Natürliche Zahlen

Von der Anzahl oder Ordnung einer Menge von Dingen kommen wir zu den *natürlichen* Zahlen 1, 2, 3, ..., zu denen wir hier auch die Null rechnen wollen.

Die natürlichen Zahlen können auch axiomatisch erklärt werden. Dazu nutzt man die Kenntnis ihrer Eigenschaften. Wählt man unter diesen eine minimale Zahl von Grundeigenschaften derart aus, daß sich alle weiteren von diesen ableiten lassen, so bilden diese ein Axiomensystem. Für die natürlichen Zahlen stammt das bekannteste von Peano (1891):

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger n' .
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist.
4. Die Nachfolger zweier verschiedener Zahlen sind voneinander verschieden.
5. Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' , so enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Die ersten vier Axiome sind ohne weiteres verständlich. Den Nachfolger von 0 nennt man 0' oder 1, den von 1 entsprechend 0'' oder 1' oder 2 usw. Das fünfte Axiom verwendet den Begriff einer Menge, der in 7. näher erklärt wird. Wir verstehen dabei die natürlichen Zahlen als eine Gesamtheit, eben als Menge der natürlichen Zahlen. Dieses letzte Axiom wird auch als *Induktionsaxiom* bezeichnet, es rechtfertigt den Schluß der vollständigen Induktion (siehe auch 4.3.). Mit Hilfe dieser fünf Grundgesetze können die Addition, die Multiplikation und eine Ordnungsrelation erklärt und ferner alle bekannten Rechenregeln für die natürlichen Zahlen abgeleitet werden.

Im Bereich dieser natürlichen Zahlen sind die arithmetischen Grundoperationen Addition und Multiplikation unbeschränkt durchführbar. Summe und Produkt zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Die Umkehrung dieser Rechenoperationen, die Subtraktion und die Division, lassen sich dagegen im Bereich der natürlichen Zahlen nicht unbeschränkt ausführen. So gibt es beispielsweise für die Gleichungen $5 + x = 2$ oder $3 \cdot y = 7$ unter den natürlichen Zahlen keine Lösungen x oder y .

5.1.2. Rationale Zahlen, Grundgesetze der Arithmetik

Rationale Zahlen

Diese Fragestellungen führen bekanntlich zur Einführung negativer ganzer Zahlen und der positiven und negativen Brüche. Die ganzen und die gebrochenen Zahlen bilden den Bereich der *rationalen* Zahlen. Mit ihnen kann man unbeschränkt die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus-